ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ
ГЕОЛОГИЯ И РАЗВЕДКА
1987, № 8

ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ПОИСКОВ И РАЗВЕДКИ

УДК 550.837,311

Л. Н. ПОРОХОВА, В. А. ШЕВНИН, А. Г. БАХИРОВ

ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КРИВЫХ ВЭЗ НА ЭВМ С ОЦЕНКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ РЕШЕНИЯ

Используя ЭВМ при интерпретации ВЭЗ, можно увеличить скорость обработки, снизить ее трудоемкость, а главное — повысить точность и уменьшить неоднозначность результатов. Разработка алгоритмов и программ для интерпретации ВЭЗ на ЭВМ продолжается свыше 25 лет, их обзоры приведены, например, в [1, 2, 5]. Среди алгоритмов преобладают разные варианты подбора, т. е. косвенной интерпретации, заключающиеся в изменении параметров заданной модели так, чтобы модельная кривая ВЭЗ совпала с наблюденной. В большинстве алгоритмов подбора за критерий качества интерпретации принимают величину невязки — среднее относительное расхождение модельной и наблюденной кривых. Недостаток этого критерия — слабая связь с погрешностями оцениваемых параметров модели, часто в алгоритмах подбора погрешности параметров не оцениваются. Изложенный в настоящей работе статистический алгоритм интерпретации позволяет, наряду с получением решения, определить погрешности оценок всех параметров модели, корреляционные связи оценок параметров, а также показать причины, приводящие к высоким погрешностям.

Статистический подход к решению обратных задач геофизики, в частности геоэлектрических зондирований, изложен в работах [3, 5]. Мы укажем лишь его основные моменты. В работе приняты следующие обозначения: ρ — совокупность экспериментальных значений кажущегося сопротивления на k разносах с текущим индексом разносов j; f — теоретические значения кажущегося сопротивления; ξ — случайные ошибки в ρ; Θ — вектор оцениваемых значений параметров разреза; P — вектор априорных значений; s и p — индексы текущего параметра разреза; i — индекс слоя; ρ_i — истинное сопротивление i-го слоя.

Пусть в результате ВЭЗ получены значения кажущегося сопротивления $\rho(r_j)$, $(j=1, k)$. Модель разреза представим в виде горизонтально-однородной слоистой среды, значения удельных сопротивлений ρ_i и мощностей h_i объединены в вектор параметров $\Theta=(\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_N, h_1, h_2, \ldots, h_{N-1})=(\Theta_1, \Theta_2, \ldots, \Theta_s, \ldots, \Theta_n)$, состоящий из $n \leqslant 2N-1$ компонент. Число n будет меньше $2N-1$ в том случае, если какие-либо из параметров фиксированы.

Требуется определить все n компонент модели горизонтально-слоистого разреза. Будем учитывать, что экспериментальные данные ρ осложнены случайными ошибками ξ, т. е. $\rho_j=f_j+\xi_j$, причем среднее значение ξ равно 0. Дисперсия $D(\rho_j)$ случайных величин ρ_j в предположении, что ρ некоррелированы по j, может быть выражена формулой:

$$D(\rho_j)=f_j^2 \cdot D_0. \qquad (1)$$

Обратим внимание, что дисперсия выборки ρ — функция параметров среды. Предположим, она не определяется из наблюдений. Тогда, учитывая (1), ее можно оценить путем включения в число неизвестных параметров.

Таким образом, обратная задача ВЭЗ оказывается эквивалентной статистической задаче оценивания параметров Θ по случайной выборке ρ. Для ее решения используется критерий максимального правдоподобия: в качестве оценки составляющих вектора неизвестных параметров Θ принимаются такие значения Θ_s, при которых логарифмическая функция правдоподобия $l(\Theta)$ достигает максимума.

Из математической статистики известно: функция правдоподобия численно равна плотности вероятности выборки $P(\rho, \Theta)$, когда ее элементы ρ_j приняли фиксированные значения и $P(\rho, \Theta)$ зависит только от вектора параметров Θ.

При полевых измерениях, как показывает практика ВЭЗ, среднеквадратическая ошибка в ρ не превышает 5%. В этом случае допустимо принять нормальное распределение. Принято считать [4], что экспериментальные значения ρ подчиняются логнормальному закону распределения, исходя из $\rho_j > 0$. Отличие истинного распределения от нормального важно учитывать только, когда ошибки велики, т. е. велика дисперсия наблюдений. При малых ошибках многие распределения, в том числе и логнормальное в предельном случае, переходят в нормальное.

Представим логарифмическую функцию правдоподобия данных, как показано в работе [3], в виде:

$$l_Д(\Theta) = -\frac{1}{2}\left\{K\ln(2\pi D_0) + \sum_{j=1}^{K}\left[\ln f_j + D_0^{-1}(\rho_j - f_j)^2/f_j^2\right]\right\} \quad (2)$$

Если имеются априорные оценки параметров P_s и допустимые пределы их возможных значений, выраженные в виде дисперсий $D(P_s)$, то допустив отличия P_s от истинной величины Θ_s на случайную ошибку $\Delta\Theta_s$, распределенную нормально с нулевым средним, для априорной логарифмической функции правдоподобия параметров можно записать:

$$l_П(\Theta) = -\frac{1}{2}\left\{n\ln(2\pi) + \sum_{S=1}^{n}\left[\ln D(P_S) + (P_S - \Theta_S)^2/D(P_S)\right]\right\} \quad (3)$$

Тогда апостериорная (обобщенная) логарифмическая функция правдоподобия $l_{Д,П}(\Theta)$, обозначаемая далее как $l(\Theta)$, равна

$$l(\Theta) = l_Д(\Theta) + l_П(\Theta) = -\frac{1}{2}\left\{(n+K)\ln 2\pi + K\ln D_0 + \sum_{S=1}^{n}\left[\ln D(P_S) + (P_S - \Theta_S)^2/D(P_S)\right] + \sum_{j=1}^{K}\left[\ln f_j + D_0^{-1}\left[(\rho_j - f_j)^2/f_j^2\right]\right]\right\} \quad (4)$$

В общем виде задача сводится к поиску максимума функции $l(\Theta)$ по Θ, последнее эквивалентно решению системы нелинейных уравнений:

$$dl(\Theta)/d\Theta_s = 0, \quad (s = 1, 2, \ldots, n). \qquad (5)$$

Для ее решения используется метод Ньютона—Маркуардта с поправкой Лекама, подробно описанный в работах [3, 5]. Согласно этому методу, начиная с некоторой заданной точки начального приближения $\Theta^{(0)}$, переходят в новую точку $\Theta^{(1)}$ (в общем случае из $\Theta^{(r-1)}$ в $\Theta^{(r)}$) и двигаются в параметрическом пространстве по направлению, определяемому величиной:

$$\Delta\Theta = (A + L)^{-1} \cdot B, \qquad (6)$$

Тогда $\Theta^{(r)} = \Theta^{(r-1)} + \Delta\Theta^{(r)}$, (7)

где r номер шага итераций; L диагональная матрица, члены которой регулируют сходимость процесса, не позволяя слишком менять направление при последовательном приближении [3]. В формуле (6) элементы матрицы A и вектора B определяются так:

$$A_{sp} = (1+D_0)\, D_0^{-1} \sum_{j=1}^{K} (C_{js} \cdot C_{jp}), \quad (8) \qquad B_s = \sum_{j=1}^{K} (\rho_j^2 - f_j \rho_j - D_0 f_j^2)(f_j^3 D_0)^{-1} C_{js}, \quad (9)$$

где $C_{js} = \partial \ln f_j / \partial \Theta_s$ вычисляются в точке $\Theta = \Theta^{(r-1)}$. Отметим, что формулы (8, 9) написаны для случая, когда априорные сведения отсутствуют. Их наличие влечет добавки в B и в диагональные члены матрицы A [3, 5].

Процесс последовательных приближений продолжается до тех пор, пока не будет достигнуто условие:

$$\left| \left(l^{(r)} - l^{(r-1)} \right) / l^{(r-1)} \right| < \delta, \qquad (10)$$

где δ — заданный уровень сходимости. Параметры $\Theta^{(r)}$, полученные при выполнении условия (10), принимаются за решение задачи.

Определение оптимальной модели разреза оценок сопротивлений слоев $\rho_{уд}$

<table>
<tr><th rowspan="2">Номер слоя</th><th colspan="2">Исходная модель</th><th colspan="5">Погрешности оценок $\rho_{уд}$</th></tr>
<tr><th>$\rho_{уд}$</th><th>h</th><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th></tr>
<tr><td>1</td><td>30</td><td>5</td><td>1,04</td><td>1,02</td><td>1,02</td><td>1,02</td><td>1,02</td></tr>
<tr><td>2</td><td>100</td><td>1,5</td><td>1,86</td><td>1,67</td><td rowspan="2">2,02</td><td rowspan="2">1,82</td><td rowspan="2">1,85</td></tr>
<tr><td>3</td><td>70</td><td>4</td><td>2,80</td><td>2,76</td></tr>
<tr><td>4</td><td>10</td><td>8</td><td>>5</td><td>>5</td><td>>5</td><td>—</td><td rowspan="5">1,20</td></tr>
<tr><td>5</td><td>250</td><td>1</td><td>1,28</td><td rowspan="4">3,18</td><td rowspan="4">2,73</td><td rowspan="4">2,82</td></tr>
<tr><td>6</td><td>15</td><td>6</td><td>5</td></tr>
<tr><td>7</td><td>80</td><td>4</td><td>2,17</td></tr>
<tr><td>8</td><td>15</td><td>3,5</td><td>>5</td></tr>
<tr><td>9</td><td>300</td><td>5</td><td>1,23</td><td rowspan="2">1,14</td><td rowspan="2">1,34</td><td rowspan="2">1,08</td><td rowspan="2">1,11</td></tr>
<tr><td>10</td><td>350</td><td>∞</td><td>1,16</td></tr>
</table>

Примечание. Слои 1—3 — рыхлые отложения разного состава; 4 — юрские няка, глин и мергелей; 9—10 — среднекаменноугольная толща известняков, вывет А — 10 слоев; Б — 6; В, Г — 5; Д — 4. В модели Г сопротивление $\rho_3 = 10$ закреплено.

Оценки максимального правдоподобия в рамках принятой модели разреза при условии $k \gg n$ (количество данных значительно больше числа неизвестных параметров) асимптотически несмещены и нормальны с ковариационной матрицей совместных оценок параметров $R = \| -\partial^2 l(\Theta)/\partial\Theta_s \cdot \partial\Theta_p \|^{-1}$.

Матрица R совпадает с элементами A^{-1}, если в последней дифференцирование проводить в точке пространства параметров, соответствующей найденным оценкам Θ_s. Матрица R называется матрицей ошибок Фишера. Диагональные члены R_{ss} — оценки дисперсий Θ_s. Погрешность удобней характеризовать относительной величиной γ:

$$\gamma_s = \sqrt{R_{ss}}/\Theta_s. \qquad (11)$$

Если $\gamma_s < 0{,}4$, то доверительный интервал оценки Θ_s равен

$$(\Theta_s - t\sqrt{R_{ss}}) < \Theta_s < (\Theta_s + t\sqrt{R_{ss}}), \qquad (12)$$

где t коэффициент Стьюдента. При расчетах использовалось значение $t = 1{,}96$, соответствующее доверительной вероятности 95%. При $\gamma_s > 0{,}4$ доверительный интервал, вычисленный по формуле (12), будет выходить из области допустимых значений параметров. В связи с этим можно

по величине погрешностей и мощностей слоев h

<table>
<tr><th colspan="5">Погрешности оценок h</th><th colspan="2">Оптимальная модель (Г)</th></tr>
<tr><th>А</th><th>Б</th><th>В</th><th>Г</th><th>Д</th><th>$\rho_{уд}$</th><th>h</th></tr>
<tr><td>2,19</td><td>1,28</td><td>1,25</td><td>1,15</td><td>1,16</td><td>30,2</td><td>5,3</td></tr>
<tr><td rowspan="3">все ε >5</td><td rowspan="2">все ε >5</td><td>2,81</td><td>1,98</td><td>2,13</td><td>102,9</td><td>4</td></tr>
<tr><td>>5</td><td>1,90</td><td rowspan="2">1,27</td><td>10</td><td>8,9</td></tr>
<tr><td>1,90</td><td>1,87</td><td>1,47</td><td>47,5</td><td>32,9</td></tr>
<tr><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>—</td><td>361,5</td><td>∞</td></tr>
</table>

глины; 5—8 — верхнекаменноугольная толща переслаивания тонких пластов известрелая в верхней части (слой 9). А—Д соответствуют разным моделям разреза: Прочерк — погрешности оценок h для последнего слоя не определены.

вместо Θ_s рассматривать связанный с ним параметр $m_s = \ln \Theta_s$. Доверительный интервал для m_s определяется, как и ранее: $(m_s - t\gamma_s) < m_s < (m_s + t\gamma_s)$, а полученный из него доверительный интервал для Θ_s:

$$(\Theta_s/\varepsilon_s) < \Theta_s < (\Theta_s \cdot \varepsilon_s), \qquad (13)$$

где $\varepsilon_s = \exp(t\gamma_s)$.

Величину ε можно принять за количественную оценку устойчивости решения обратной задачи ВЭЗ. Наш опыт показал: устойчивое решение должно характеризоваться $\varepsilon < 2$. При $\varepsilon = 2$—5 решение неустойчиво (слишком велико действие принципа эквивалентности). При $\varepsilon > 5$ интерпретацию в рамках заданной модели проводить бессмысленно. Необходимо либо ввести априорную информацию, либо заменить модель, уменьшив число слоев.

Важная характеристика эффективности решения — коэффициенты корреляции оценок Θ_s, Θ_p, устанавливаемые по внедиагональным членам ковариационной матрицы R:

$$r_{sp} = R_{sp}/\sqrt{R_{ss}R_{pp}}, \quad (s = 1, n;\ p = 1, n;\ s \neq p). \qquad (14)$$

Пусть R_{ss} определяет дисперсию оценки Θ_s в отсутствии корреляции между оценками Θ_s и Θ_p. Тогда

$$R_{ss} = R^0{}_{ss}/\sqrt{1 - r_{sp}}. \qquad (15)$$

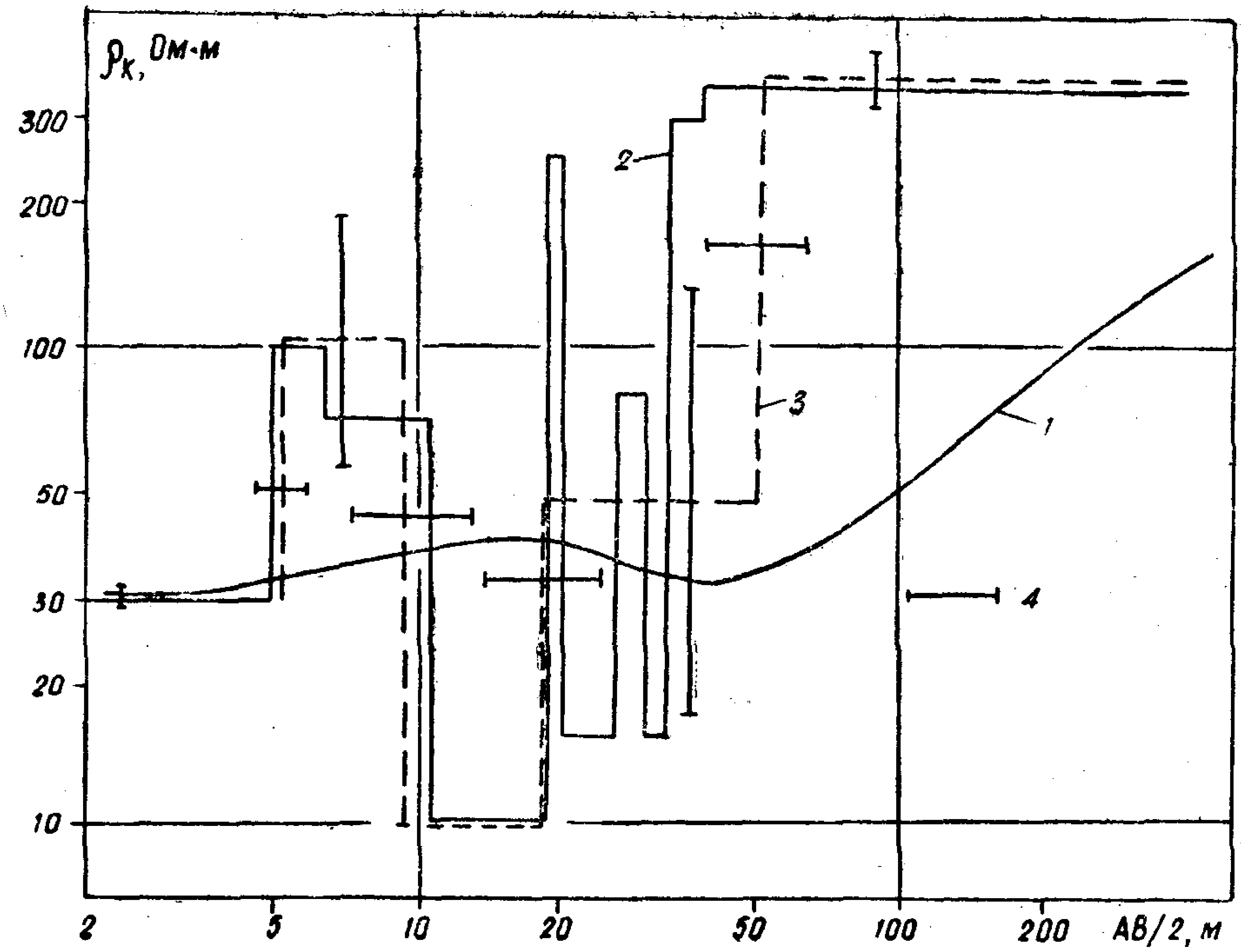
Из (15) видно: величина дисперсии быстро возрастает с увеличением коэффициента корреляции. При $r_{sp} \to 1$ дисперсия бесконечно растет, и соответствующие параметры совместно различить невозможно.

Изложенный подход к решению обратной задачи ВЭЗ реализован в виде программы для ЭВМ на языке ФОРТРАН-IV. В основном в ней используются модели, разработанные в НИИФ ЛГУ для интерпретации магнитотеллурических данных. Изменены лишь подпрограммы расчета прямой задачи и частных производных. Эти функции вычисляются при помощи алгоритма линейной фильтрации с коэффициентами Д. П. Гоша, как описано в работе [2]. Программа отлажена на ЭВМ серий ЕС и СМ. Время решения обратной задачи для одной пятислойной кривой ВЭЗ составляет от 30 до 60 с на СМ-4 и около 7 с на ЕС-1033. Программа может работать в трех основных режимах: *0*, *1*, *2*. В режиме *0* задается кривая $\rho(r)$ и начальное приближение, определенное по виду кривой (число слоев и параметры модели).

В режиме *1* часть параметров разреза закрепляется, если они известны по данным других методов или определены по асимптотам на кривых ВЭЗ. Уменьшение размерности задачи ($n < 2N - 1$) повышает скорость решения и точность определения остальных параметров.

В режиме *2* дополнительно вводятся индивидуальные ограничения на каждый из искомых параметров в виде априорных нижних и верхних пределов допустимых значений. Эта априорная информация, попадая через функцию (4) в систему уравнений (5), улучшает обусловленность матрицы A и снижает значения диагональной матрицы L, обеспечивающей сходимость итерационного процесса (6), приводит к улучшению эффективности оценок Θ_s, т. е. к сужению доверительных апостериорных интервалов (13) и уменьшению коэффициентов корреляции (14).

Совместное рассмотрение значений ε_s и корреляционной матрицы r позволяет установить причины высоких погрешностей оценок параметров. Как правило, большие ε_s связаны (и вызваны) близкими к ± 1 коэффициентами корреляции r_{sp}. Если r (ρ_1, h_1) близок к $+1$, мы имеем дело с S-эквивалентностью. Значениями $r(\rho_1, h_1)$, близкими к -1, характеризуется T-эквивалентность. Если, например, $r(\rho_1, h_1)$ близок к ± 1, значит на кривой ВЭЗ нет левой асимптоты. Тесные корреляцион-



Результаты интерпретации модельной кривой ВЭЗ

1 — кривая $\rho_к$; *2* — истинная десятислойная модель ρ (z); *3* — оптимальная пятислойная модель с закрепленным значением $\rho_з$ по результатам интерпретации; *4* — доверительные интервалы оценок параметров

ные связи нередко отмечаются между оценками h_1 и ρ_2, в этом случае неопределенность в оценке абсциссы первого креста влечет за собой неточности в оценке $\mu = \rho_2/\rho_1$.

Установив причину высоких погрешностей оценок параметров, наметим пути улучшения решения. Для *S*- и *T*-эквивалентностей можно закрепить один из параметров. Это помогает резко уменьшить ε для другого параметра, хотя и не устраняет ее совсем, ведь остаются связи этого параметра с соседними слоями. Высокие r_{sp} соседних слоев при отсутствии априорной информации вынуждают объединять их, так как в полевой кривой недостаточно информации для их раздельного определения.

Покажем возможности статистической интерпретации на тестовом примере. По геологическим данным разрез состоит из 10 слоев. Их параметры указаны в таблице. Кривая ВЭЗ (рисунок) имеет вид четырехслойной типа КН, хотя при внимательном рассмотрении можно предположить наличие слоя *А* после *Н* (т. е. тип КНА). Интерпретация кривой ВЭЗ как десятислойной показала: погрешности большинства параметров недопустимо велики (таблица). Поэтому необходимо уменьшить число искомых параметров. Объединив слои *5—8* в один и присоединив слой *9* к *10*, получим шестислойную модель. В ней оказывается невозможным раздельно определить h_2 и h_3. Объединив их, получим пятислойную модель с третьим слоем, подверженным сильной *S*-эквивалентности ($r[\rho_3 h_3] = 0{,}99$).

Для улучшения качества решения возможны два пути: *А* — введение дополнительной информации о ρ_3; *Б* — дальнейшее уменьшение числа слоев модели. Основанием для *А* является $r(\rho_3, h_3)$, а для *Б* — корреляция ρ_3 и h_3 с h_4 ($r > 0{,}7$). Закрепив ρ_3 для юрских глин на 10 Ом·м, резко уменьшим ошибки в h_3 с $\varepsilon > 5$ до 1,9. Объединяя слои *3* и *4*, даже без закрепления параметров, получим весьма малые оценки погрешностей. Но этот путь приводит к потере геологического смысла задачи, так как в решении утрачен слой юрских глин, обнаружение которого являлось основной задачей ВЭЗ в этом районе. Таким образом, с геологической точки зрения и по точности решения наиболее приемлем вариант *A* с пятью слоями и с закрепленным ρ_3 для глин. Если же сравнивать качество интерпретации только по невязке кривых, то она примерно одинакова во всех рассмотренных случаях.

Приведенный пример иллюстрирует возможности программы, но не методику интерпретации с использованием ЭВМ. Последняя заслуживает отдельного обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колесников В. П. Обработка и интерпретация результатов вертикального электрического зондирования с помощью ЭВМ. М.: Недра, 1981.
2. Куфуд О. Зондирование методом сопротивлений. М.: Недра, 1984.
3. Статистическая интерпретация геофизических данных / Под ред. Ф. М. Гольцмана. Л.: Изд-во ЛГУ, 1981.
4. Электроразведка: Справочник геофизика. М.: Недра, 1979.
5. Яновская Т. Б., Порохова Л. Н. Обратные задачи геофизики. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983.

Ленинградский государственный
университет им. А. А. Жданова
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова